Απειροστικός λογισμός ΙΙ

18/03/2019

Ομοιόμορφη Συνέχεια

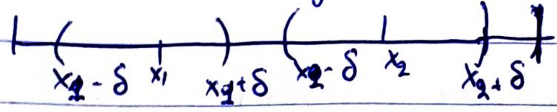
$F: A \to \mathbb{R}$ συνεχής αν:

$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τω $\forall y \in (x-\delta, x+\delta) \cap A$

ισχύει $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$

Το δ εξαρτάται από το ε και από το x!

Αν μπορώ να βρω $\delta > 0$ που να εξαρτάται μόνο από το ε (για όλα τα ε)(το δ είναι ομοιόμορφα για όλα τα x) και όχι από το x, τότε η F λέγεται ομοιόμορφα συνεχής



F ομοιόμορφα συνεχής $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τ.ω $\forall x \in A$ $\forall y \in (x-\delta, x+\delta) \cap A$ να ισχύει $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0), \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τω $\forall x \in A$ $\forall y \in A$ με $|x-y| < \delta$ να ισχύει $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$

ΟΡΙΣΜΟΣ Ομοιόμορφης Συνέχειας

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τω $\forall x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$ να ισχύει $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν F: ομοιόμορφα συνεχής $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ F συνεχής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

① $F(x) = x$ $x \in \mathbb{R}$ Έστω $\varepsilon > 0$ Αναζητούμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τω $\forall x, y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta$ να ισχύει $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$

Άρα για $\delta = \varepsilon$ (ή οποιοδήποτε μικρότερο) έχω $|F(x) - F(y)| = |x-y| < \varepsilon$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta$

Άρα ομοιόμορφη συνεχής η ταυτοτική συνάρτηση

② $F(x) = x^2$ $x \in \mathbb{R}$ Έστω $\varepsilon > 0$. Αναζητούμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τω $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta$, $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$

$|F(x)-F(y)| = |x^2-y^2| = |x-y||x+y|$ Έστω ότι υπάρχει τέτοιο $\delta>0$ Παίρνω $x = \frac{M+\delta}{2}$ $y = M > 0$

$\Rightarrow |x-y| = \delta/2 < \delta$

Αλλά $|F(x)-F(y)| = \frac{\delta}{2}(2M+\delta/2)$

Για $M > \varepsilon/\delta$ έχω $|F(x)-F(y)| = \delta/2\,(2M+\delta/2) = \delta M > \varepsilon$ Άτοπο

(Έπρεπε να είναι μικρότερο Μπορούσαμε να πάραμε $\varepsilon=1$ $M > 1/\delta$ θα έβγαινε.)

$\Rightarrow$ F δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής

(3) $F(x) = x^2$ $x\in[0,1]$. Έστω $\varepsilon>0$
Αναζητούμε $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ τω $\forall x,y\in[0,1]$ με $|x-y|<\delta$ να ισχύει $|F(x)-F(y)|<\varepsilon$
$|F(x)-F(y)| = |x-y||x+y| \le 2|x-y|$
$\forall x,y\in[0,1]$ $|x+y|\le 2$
Για $\delta = \varepsilon/2$ $\forall x,y\in[0,1]$
$|x-y|<\delta \Rightarrow |F(x)-F(y)|<\varepsilon$

Αν σε ένα μεγάλο διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής τότε θα είναι σίγουρα και στο μικρό

$\Rightarrow$ Άρα ομοιόμορφα συνεχής

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $F: A\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής $B\subseteq A$, τότε $F/B: B\to\mathbb{R}$ -//- -//- ($\not\Leftarrow$)

ΟΡΙΣΜΟΣ $F: A\to\mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής αν $\exists M>0$ τω $\forall x,y\in A$ ισχύει $|F(x)-F(y)| \le M|x-y|$

ΠΡΟΤΑΣΗ Αν $F: A\to\mathbb{R}$ είναι Lipschitz τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής

Αποδειξη:

Εστω $\varepsilon>0$ Για $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$ $\forall x,y\in A$ με

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |F(x)-F(y)|\leq M|x-y|<M\delta=M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

$\Rightarrow$ Άρα η F ομοιόμορφα συνεχής

- F Lipschitz $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ F ομοιόμορφα συνεχής $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ F συνεχής

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $I\subseteq\mathbb{R}$ διάστημα, $F: I\to\mathbb{R}$ παραγ. στο I. Τότε F Lipschitz αν-αν F' είναι φραγμένη

Αποδειξη ($\Rightarrow$) Εστω F Lipschitz $\Rightarrow \exists M>0$ τω $\forall x,y\in I$ να ισχύει $|F(x)-F(y)|\leq M|x-y|$. Εστω $x_0\in I$

$$|F'(x_0)|=\left|\lim\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\right| \underset{\text{υπάρχει}}{\overset{\text{Το όριο}}{=}}$$

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\right|\leq\lim_{x\to x_0}\frac{M|x-x_0|}{|x-x_0|}=M$$

$\Rightarrow$ $\forall x_0\in I$, $|F'(x_0)|\leq M \Rightarrow F'$ φραγμένη

($\Leftarrow$) Εστω οτι F' είναι φραγμένη $\Rightarrow \exists M>0$ τω $\forall x\in I$, $|F'(x)|\leq M$ Θδο $|F(x)-F(y)|\leq M|x-y|$ $\forall x,y\in I$

Εστω $x,y\in I$ με $x\neq y$. Χωρις βλάβη της γενικότητας υποθέτω $x>y$ Απο ΘΜΤ $\exists\,\xi\in(y,x)\subseteq I$ τω

$$F'(\xi)=\frac{F(x)-F(y)}{x-y}$$

$$\Rightarrow \underset{M}{\underset{\wedge|}{|F'(\xi)|}}=\left|\frac{F(x)-F(y)}{x-y}\right|\Rightarrow|F(x)-F(y)|\leq M|x-y|$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $F(x)=\cos x$, $x\in[0,\frac{\pi}{2}]\Rightarrow$

$F'(x)=-\sin x \Rightarrow |F'(x)|=|-\sin x|\leq 1$, $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow$ F' φραγμένη $\Rightarrow$ F Lipschitz $\Rightarrow$ F ομοιόμορφα συνεχής

(*) Ομοίως θα γινόταν και αν $x\in\mathbb{R}$ άρα δεν χρειάζεται φραγμένο διάστημα

(*) F συνεχής στο $x_0 \in I$ αν-ν $\forall \{x_n\}$ από το I τω $x_n \to x_0$, ισχύει $F(x_n) \to F(x_0)$

Ακολουθιακός ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

ΠΡΟΤΑΣΗ: $F: A \to \mathbb{R}$ Η F είναι ομοιόμορφα συνεχής αν-αν $\forall \{x_n\}, \{y_n\}$ από το A με

$$x_n - y_n \to 0$$

ισχύει $F(x_n) - F(y_n) \to 0$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω ότι F ομοιόμορφα συνεχής

Έστω $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τω $\forall x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$ να ισχύει $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$ (*)

Έστω $\{x_n\}, \{y_n\}$ από το A με $x_n - y_n \to 0$

$\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τω $|x_n - y_n| < \delta = \delta(\varepsilon)$ $\forall n \geq n_0$

$\xrightarrow{(*)}$ $|F(x_n) - F(y_n)| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

$\longrightarrow F(x_n) - F(y_n) \longrightarrow 0$

($\Leftarrow$) Έστω ότι $\forall \{x_n\}, \{y_n\}$ από το A με $x_n - y_n \to 0$ ισχύει $F(x_n) - F(y_n) \to 0$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αναζητώ $\delta = \delta(\varepsilon)$ τω $\forall x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$ να ισχύει $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$

Έστω ότι δεν υπάρχει τέτοιο δ. Άρα, για $\delta = 1/n$ $\exists\, x_n, y_n \in A$ τω $|x_n - y_n| < 1/n$, αλλά $|F(x_n) - F(y_n)| \geq \varepsilon$

Άρα βρήκαμε ακολουθίες $\{x_n\}, \{y_n\}$ από το A τω $x_n - y_n \to 0$ αλλά $F(x_n) - F(y_n) \not\to 0$ Άτοπο

Άρα η F είναι ομοιόμορφα συνεχής

ΠΡΟΤΑΣΗ: $F: A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής αν-αν $\forall \{x_n\}, \{y_n\}$ από το A τω $x_n - y_n \to 0$ ισχύει $F(x_n) - F(y_n) \to 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

① $F: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ $\quad F(x) = x$

Είναι ομοιόμορφα συνεχής γιατί η $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$F(x) = x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής

② $F: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ με $F(x) = x^2$

$$\left.\begin{aligned} x_n &= n + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \\ y_n &= n \in \mathbb{Q} \end{aligned}\right\} x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$$

$$F(x_n) - F(y_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2$$

$$= n^2 + 2n\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \not\to 0$$

$\Rightarrow F$ όχι ομοιόμορφα συνεχής

③ $F: (0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad F(x) = \frac{1}{x}$

$x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$

$\frac{1}{n} \in (0,1]$, $\frac{1}{n^2} \in (0,1]$

• $x_n - y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \to 0$

$F(x_n) - F(y_n) = n - n^2 = n(1-n) \to -\infty \neq 0$

$\Rightarrow F$ δεν είναι ομ. συνεχής

④ $F(x) = \begin{cases} 1 & , x \in (1/2, 1] \\ 0 & , x \in [0, 1/2] \end{cases}$

δεν είναι συνεχής, άρα δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής

⑤ $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad F(x) = \cos(x^2)$ $\quad$ { $F(x) = \cos x$ είναι ομ. συνεχής

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \sqrt{(2n+1)\pi} \\ y_n &= \sqrt{2n\pi} \end{aligned}\right\} x_n - y_n = \sqrt{(2n+1)\pi} - \sqrt{2n\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{(2n+1)\pi} - \sqrt{2n\pi}}{\sqrt{(2n+1)\pi} + \sqrt{2n\pi}} = \frac{\pi}{\sqrt{(2n+1)\pi} + \sqrt{2n\pi}} \to 0$$

Όμως $F(x_n) - F(y_n) = \cos((2n+1)\pi - \cos(2n\pi)) = -2$

• Lipschitz $\Rightarrow$ ομ. συνέχεια $\Rightarrow$ Συνέχεια (καμία σχέση με φραξιμότητα)
$\quad\quad\quad\quad\;\,\not\Leftarrow \quad\quad\quad\quad\quad \not\Leftarrow$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>: $F: [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad F(x) = \sqrt{x}$ $\quad\quad F(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$

Ν.δ.ο η F δεν είναι Lipschitz στο $[0,1]$

$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ μη φραγμένη $\Rightarrow$ F δεν είναι Lipschitz στο $[0,1]$

$\Rightarrow \forall M > 0\ \exists x, y \in (0,1]$ (= $[0,1]$) τω $|F(x) - F(y)| \geq M|x-y| \Rightarrow F$ δεν είναι Lipschitz στο $[0,1]$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Έστω $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η F είναι ομοιόμορφα συνεχής

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\{x_n\}, \{y_n\}$ δύο ακολουθίες από το $[a, b]$ τέτοιες ώστε $x_n - y_n \to 0$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ Bolzano-Weierstrass</u> Έστω $\{z_n\}$ μια φραγμένη ακολουθία. Τότε υπάρχει υπακολουθία $\{z_{k_n}\}$ της $\{z_n\}$ που να συγκλίνει

Κλειστό μη φραγμένο διάστημα = συμπαγές

Επειδή $a \leq x_n \leq b_n \Rightarrow \{x_n\}$ φραγμένη $\xRightarrow[\text{Bol-We}]{\text{Θεώρημα}}$ $\exists \{x_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{x_n\}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ τω $x_{k_n} \to x_0$. Έχω $a \leq x_{k_n} \leq b \Rightarrow a \leq \lim x_{k_n} \leq b \Rightarrow x_0 \in [a, b]$

$w_n = x_n - y_n \to 0 \Rightarrow w_{k_n} = x_{k_n} - y_{k_n} \to 0 \Rightarrow y_{k_n} = (y_{k_n} - x_{k_n})$
$x_{k_n} \to x_0$

Ν.δ.ο $F(x_n) - F(y_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

• $F(x_{kn}) \to F(x_0)$

• $F(y_{kn}) \to F(x_0)$

$\to F(x_{kn}) - F(y_{kn}) \to 0$

Όσο $\{F(x_n) - F(y_n)\}$ είναι Cauchy

$\to \{F(x_n) - F(y_n)\}$ συγκλίνει

$\to \lim_{n \to \infty} (F(x_n) - F(y_n)) = \lim_{n \to \infty} (F(x_{kn}) - F(y_{kn})) = 0$

$\to F$ ομ. συνεχής